

S4 GEDÄMPFTE SCHWINGUNGEN

15. Februar 2010

Tim Hartung - Informatik BA - FS x - Matnr: xxxxxxxx

thart@mail.uni-paderborn.de

Marcel Lauhoff - Informatik BA - FS x - Matnr: xxxxxxxx

mlauhoff@mail.uni-paderborn.de

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Rotationsbewegung	2
2.2	Rotationsschwingungen	3
2.3	Lösung der Differentialgleichung	3
2.4	Dämpfung durch Wirbelstrombremse	6
3	Aufbau und Durchführung	7
3.1	Aufbau	7
3.2	Durchführung	8
4	Ergebnisse	9
4.1	Auswertung der Messdaten	9
4.2	Fehlerrechnung	16
5	Literatur	20
6	Anhänge	21

1 Einleitung

Im Versuch S4 werden mit Hilfe eines POHLschen Drehschwingers Rotationsschwingungen erzeugt. Diese werden durch eine in den Drehschwinger eingebaute Wirbelstrombremse bestehend aus zwei Spulen gedämpft. Hierfür werden verschiedene Stromstärken an die Spulen angelegt und jeweils die Schwingungsdauer und Amplituden der gedämpften Schwingung gemessen. Aus den ermittelten Werten lässt sich die Abklingkonstante k der Schwingungen errechnen. Der Zusammenhang zwischen k und der Stromstärke I soll untersucht werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Rotationsbewegung

Bei der in diesem Versuch betrachteten Rotationsschwingung eines Drehschwingers handelt es sich um eine spezielle Form der Bewegung. Als Rotation bezeichnet man allgemein eine Kreisbewegung eines Körpers um eine Rotationsachse. Für Rotationsbewegungen gelten dieselben Gesetzmässigkeiten welche auch für Translationsbewegungen gelten, allerdings unterscheiden sich die verwendeten physikalischen Grössen signifikant. Die folgende Tabelle zeigt eine Gegenüberstellung der physikalischen Grössen für Translations- und Rotationsbewegungen:

Translation	Rotation
Kraft \vec{F}	Drehmoment \vec{M}
Masse m	Trägheitsmoment J
Strecke \vec{s}	Drehwinkel $\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit \vec{v}	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
Beschleunigung \vec{a}	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$

Tabelle 1: Gegenüberstellung der physikalischen Grössen von Translation und Rotation

Das Drehmoment \vec{M} lässt sich an einem Punkt des rotieren Körpers aus dem Abstand \vec{r} des Punktes zur Drehachse und der anliegenden Kraft \vec{F} wie folgt berechnen:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

Für die Winkelgeschwindigkeit gilt analog zur Translationsbewegung:

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} \quad (2)$$

Für die Winkelbeschleunigung gilt ebenfalls analog:

$$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\varphi}} \quad (3)$$

Das Trägheitsmoment J eines rotierenden Körpers ist abhängig von seiner Form, Dichte und Massenverteilung und kann mit Hilfe der Winkelbeschleunigung α und dem Drehmoment M wie folgt berechnet werden:

$$J = \frac{M}{\alpha} \quad (4)$$

2.2 Rotationsschwingungen

Für ein schwingendes System bestehend aus einer Feder und einer Masse lässt sich die folgende Bewegungsgleichung aufstellen:

$$F_M + F_R + F_S = 0 \quad (5)$$

Hierbei bezeichnet F_M die Masse auslenkende Kraft, F_S die rückstellige Federkraft und F_R die an der Masse wirkende Reibungskraft. Für F_M gilt:

$$F_M = m \cdot \ddot{s} \quad (6)$$

Für F_S gilt:

$$F_S = D \cdot s \quad (7)$$

In diesem Fall ist D die Federkonstante der benutzten Feder. Für F_R gilt mit R als Reibungskonstante:

$$F_R = R \cdot \dot{s} \quad (8)$$

Durch Einsetzen der Formeln für die verschiedenen Kräfte erhält man die Bewegungsgleichung des Systems:

$$m \cdot \ddot{s} + R \cdot \dot{s} + D \cdot s = 0 \quad (9)$$

Analog kann nun die Gleichung für eine Rotationsschwingung aufgestellt werden:

$$J \cdot \ddot{\varphi} + R^* \cdot \dot{\varphi} + D^* \cdot \varphi = 0 \quad (10)$$

Zu beachten ist, dass D^* in diesem Fall das Richtmoment der Spiralfeder angibt. Dieses lässt sich aus dem Drehmoment und dem Auslenkwinkel berechnen:

$$D^* = \frac{M}{\varphi} \quad (11)$$

2.3 Lösung der Differentialgleichung

Als Lösungsansatz für die homogene Differentialgleichung 2. Ordnung (10) wählen man die folgende Funktion:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \quad (12)$$

Für die erste Ableitung von $\varphi(t)$ gilt:

$$\dot{\varphi}(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \quad (13)$$

Für die zweite Ableitung von $\varphi(t)$ gilt:

$$\ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} \quad (14)$$

Einsetzen in Gleichung (10) und Teilen durch $e^{\lambda t}$ ergibt:

$$J \cdot \lambda^2 + R^* \cdot \lambda + D^* = 0 \quad (15)$$

Teilen durch J ergibt die quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{R^* \cdot \lambda}{J} + \frac{D^*}{J} = 0 \quad (16)$$

Mit Hilfe der pq -Formel ergeben sich für die Lösungen λ_1 und λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R^*}{2 \cdot J} \pm \sqrt{\left(\frac{R^*}{2 \cdot J}\right)^2 - \frac{D^*}{J}} \quad (17)$$

Als nächstes betrachten man die folgenden Substitutionen[Prk10]:

$$k = \frac{R^*}{2 \cdot J} \quad (18)$$

Hierbei bezeichnet man k als Abklingkonstante der Schwingung.

$$\omega_0^2 = \frac{D^*}{J} \quad (19)$$

ω_0 ist die Kennkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung, welche nur von der Federkonstante D^* und dem Trägheitsmoment J abhängt. Zusammen mit der Abklingkonstanten k erhält man für die gedämpfte Schwingung die Kennkreisfrequenz ω_d :

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - k^2 \quad (20)$$

Anwenden der Substitutionen ergibt:

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2} \quad (21)$$

Nun lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

1. $k^2 < \omega_0^2$: Die Wurzel wird negativ (schwache Dämpfung)
2. $k^2 = \omega_0^2$: Die Wurzel verschwindet (aperiodischer Grenzfall)

3. $k^2 > \omega_0^2$: Die Wurzel wird positiv (starke Dämpfung)

Zur Lösung betrachtet man nun den ersten Fall. Da $k^2 - \omega_0^2 < 0$ kann man Substitution (20) anwenden:

$$k^2 - \omega_0^2 = -\omega_d^2 \quad (22)$$

Einsetzen in (21) ergibt:

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{-\omega_d^2} = -k \pm \sqrt{-1} \cdot \omega_d \quad (23)$$

In komplexer Darstellung ergibt sich:

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i \cdot \omega_d^2 \quad (24)$$

Man kann sofort erkennen, dass λ_2 das konjugiert Komplexe von λ_1 ist. Einsetzen in die Lösungsfunktion (12) ergibt:

$$\varphi_1(t) = e^{-kt+i\omega_d t} = e^{-kt} \cdot e^{i\omega_d t} \quad (25)$$

Real- und Imaginärteil lassen sich nun mit dem Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen ermitteln:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad (26)$$

Für den Realteil von Funktion (25) gilt also:

$$\varphi_1(t) = e^{-kt} \cdot \cos(\omega_d t) \quad (27)$$

$\varphi_2(t)$ ergibt sich aus dem Imaginärteil:

$$\varphi_2(t) = e^{-kt} \cdot \sin(\omega_d t) \quad (28)$$

Da $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ linear unabhängig sind bildet sich die allgemeine Lösung also wie folgt:

$$\varphi(t) = A \cdot e^{-kt} \cos(\omega_d t) + B \cdot e^{-kt} \sin(\omega_d t) \quad (29)$$

Durch Einsetzen und anschließendes Umformen der Randbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ muss $A = \varphi_0$ und $B = 0$ gelten und man erhält die gesuchte Lösungsfunktion:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-kt} \cos(\omega_d t) \quad (30)$$

2.4 Dämpfung durch Wirbelstrombremse

Eine Wirbelstrombremse besteht aus 2 Elektromagneten, welche sich jeweils vor und hinter der rotierenden Scheibe befinden. Zwischen den beiden Magneten entsteht beim Anlegen eines Stromes ein homogenes Magnetfeld, welches die Scheibe durchdringt. Da diese sich bewegt erfahren die freien Elektronen in der Scheibe eine Lorentzkraft. Während sich die Elektronen durch das Magnetfeld bewegen ändert sich die Richtung dieser Kraft, was zur Folge hat das sich die Elektronen in Kreisbahnen bewegen und deshalb ein Strom zustande kommt (Wirbelstrom). Diese Ströme erzeugen ebenfalls Magnetfelder welche nach der LENZschen Regel der Bewegung der Scheibe entgegen wirken und diese bremsen. Je nach eingestellter Stromstärke an den Elektromagneten ist die Bremswirkung mehr oder weniger stark ausgeprägt.

3 Aufbau und Durchführung

Mit einem Drehschwinger nach POHL sind gedämpfte Schwingungen zu untersuchen. Es wird eine Wirbelstrombremse eingesetzt die mit unterschiedliche Stromstärken betrieben die Schwingungen abdämpft.

3.1 Aufbau

Der Hauptbestandteil des Experimentes ist der bereits erwähnte POHLSche Drehschwinger, der mit einer Wirbelstrombremse ausgestattet ist. Am Drehschwinger angebracht ist ein Pfeil, der auf einer dahinter angebrachten Skalenscheibe den Winkel der Auslenkung zeigt. Der Nullpunkt der Scheibe ist mittig der Vorrichtung und in Abb. 1 durch den weißen vertikalen Balken zu erkennen.

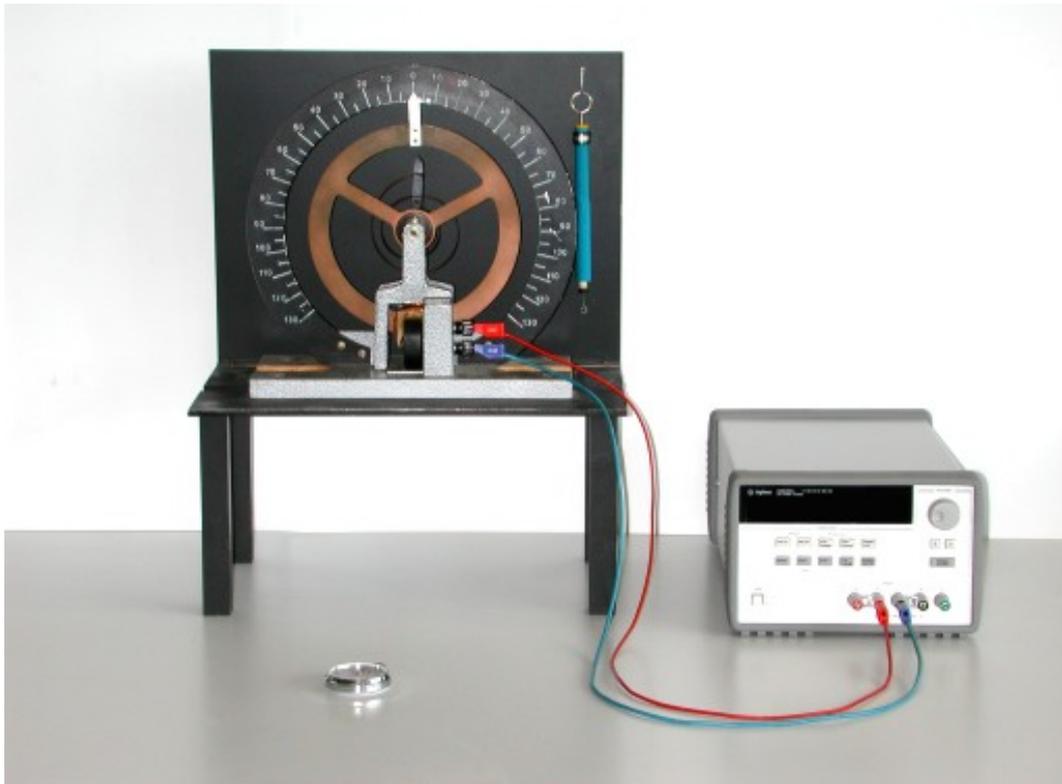


Abbildung 1: Fotografische Abbildung des Versuchsaufbaus S4

Für die eigentlichen Messungen steht eine Federwaage sowie ein Computer mit angeschlossener Kamera zur Verfügung. Mit Hilfe des Computers, der Kamera und spezialisierter Software kann die Zeigerbewegung auf der Skalenscheibe ausgewertet werden. Zur Bestimmung des Scheibenradius liegt ein Maßband bereit.

Der zum Betrieb der Wirbelstrombremse nötige Stromfluss wird durch das in Abb.1 dargestellte Netzteil spannungsgesteuert bereitgestellt. Nicht in der Abbildung dargestellt ist der zugehörige Auslöseknopf der Wirbelstrombremse.

3.2 Durchführung

Der Versuch lässt sich grob in zwei Teile einteilen. Im ersten Versuchsteil werden Daten manuell aufgenommen und mit den Handmessgeräten gemessen. Im zweiten Teil werden die Schwingungsverläufe computergestützt erhoben.

Erster Teil Folgende Messungen werden vorgenommen:

- Radius der Skalenscheibe mittels Maßband
- Kraft in Abhängigkeit vom Auslenkungswinkel durch statische Auslenkung aus der Ruhelage mit kalibrierter Federwaage bei Auslenkungswinkeln von 10° bis 90° in Schritten von 10° . Hierbei ist es wichtig die Kraft tangential anzulegen um später das Drehmoment einfach zu berechnen.
- Experimentelles bestimmen der Stromstärke $1A < I < 3A$ die den aperiodischen Grenzfall provoziert.

Zweiter Teil Die weiteren Messungen werden mittels Computer durchgeführt. Hierzu ist vor jeder Messung die gewünschte Stromstärke am Netzteil einzustellen und der Zeiger auf die Position 90° zu stellen. Am Computer wird die Videoaufnahme gestartet und anschließend wird der Taster für die Wirbelstrombremse gedrückt noch bevor der Zeiger losgelassen wird. In Tabelle 2 sind die zu messenden Stromstärken aufgeführt.

Messung Nr.	Stromstärke durch Wirbelstrombremse / mA
1	0
2	100
3	200
4	300
5	400
6	500
7	600

Tabelle 2: Stromstärken zu den einzelnen Messungen

4 Ergebnisse

4.1 Auswertung der Messdaten

Statische Auslenkung und Richtmoment Während des Experiments wurde die statische Auslenkung nach der Kraft bestimmt. Um das Drehmoment zu bestimmen wird Formel (1) für den Fall der tangentialen Kraft umgeformt. Für den Fehler wurde Formel (51) verwendet. Dadurch erhält man:

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin(\alpha) \quad (31)$$

Für Tangentiale Kraft mit $\alpha = 90^\circ$ folgt:

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \quad (32)$$

Für den Hebelarm wurde $r = (0,095 \pm 0,005)$ m gemessen.

Die berechneten Werte sind in Tabelle 3 dargestellt.

<u>Winkel</u> °	<u>Winkel</u> rad	<u>Kraft</u> N	<u>Drehmoment</u> Nm	<u>Fehler Drehmoment</u> Nm
10	0.1745	0.03	0.0029	0.0005
20	0.3491	0.06	0.0057	0.0005
30	0.5236	0.10	0.0095	0.0005
40	0.6981	0.15	0.0143	0.0006
50	0.8727	0.19	0.0181	0.0006
60	1.0472	0.26	0.0247	0.0006
70	1.2217	0.31	0.0295	0.0006
80	1.3963	0.35	0.0333	0.0007
90	1.5708	0.37	0.0352	0.0007

Tabelle 3: Berechnetes Drehmoment und Auslenkungswinkel φ

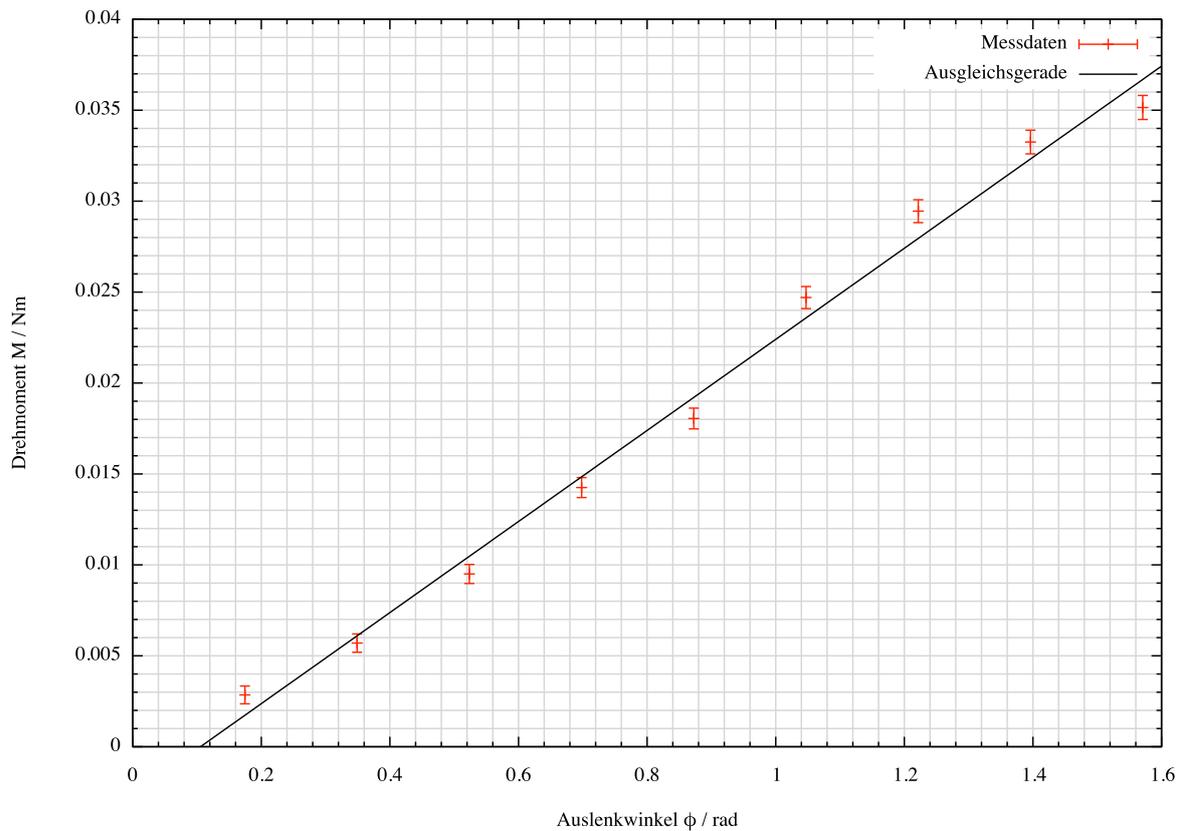


Abbildung 2: Grafische Darstellung der Messdaten des Drehmoments zum Auslenkwinkel φ , sowie Ausgleichsgerade durch die Messpunkte

Die Abhängigkeit zwischen Drehmoment und Auslenkung wird in Abb. 2 nach den Daten aus Tabelle 3 dargestellt. Weiterhin ist die Ausgleichsgerade durch die Punkte eingezeichnet. Für die Steigung der Ausgleichsgerade gilt $\frac{M}{\varphi}$ woraus folgt, dass die Steigung gleich D^* ist. Es gilt also:

$$D^* = (0,0251 \pm 0.0009) \text{ Nm} \quad (33)$$

Eigenschwingdauer T_0 Die Eigenschwingdauer wurde nicht mittels Stoppuhr ermittelt sondern wird aus der Videoanalyse für den Fall $I = 0A$ gewonnen.

Als gemittelter Wert über alle oberen Extremwerte unter Angabe der Standardabweichung ergibt sich:

$$T_0 = (1,562 \pm 0,078) \text{ s} \quad (34)$$

Die zugrunde liegenden Daten sind im Anhang zu finden.

Trägheitsmoment J Das Trägheitsmoment wird bestimmt aus den beiden zuvor ermittelten Werten D^* und T_0 . Durch Umstellen von Formel (19) nach J und Einsetzen von:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (35)$$

erhält man folgende Berechnungsvorschrift:

$$J = \frac{D^* \cdot T_0^2}{4\pi^2} \quad (36)$$

Vergleiche hierzu auf die zugehörige Fehler-Formel (55).

Durch Einsetzen der Werte ergibt sich für J :

$$J = (1,551 \pm 9,9999) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \quad (37)$$

Bestimmung der Lagerreibung Bevor aufeinander folgende Amplituden analysiert werden können ist es erforderlich den Dämpfungswert der Lagerreibung zu bestimmen. Da der Dämpfungswert zeitproportional ist zu einem linearen Abfall der Schwingungsamplituden führt wurde der Wert durch lineare Regression über die oberen Extremwerte vorgenommen. Im Abb. 3 ist dies grafisch dargestellt.

Die hieraus gewonnene Funktion lautet:

$$\text{damp}(t) = (2,53 \pm 0,10) \cdot x \quad (38)$$

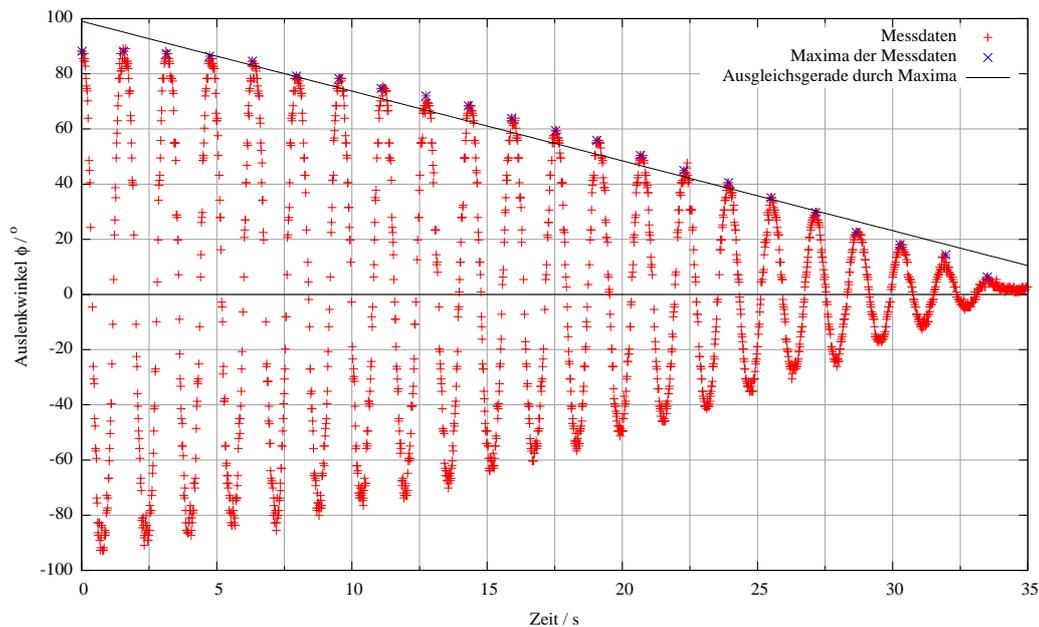


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Messwerte für Zeigerauslenkung ohne Dämpfung mit Ausgleichsgeraden durch obere Maxima

Verhältnisse der aufeinander folgenden Amplituden s_i/s_{i+1} Die Verhältnisse der aufeinander folgenden Amplituden wurden gebildet aus den korrigierten Werten. Die Vollständige Datenauswertung ist im Anhang zu finden. In Tabelle 4 sind die Berechneten Mittelwerte, sowie die Standardabweichungen zu finden.

Dämpfung/mA	Mittelwert s_i/s_{i+1}	Standardabweichung s_i/s_{i+1}
100	1,0119	0,0102
200	1,0219	0,0160
300	1,0601	0,0358
400	1,0863	0,0312
500	1,1472	0,0232
600	1,2227	0,0388

Tabelle 4: Mittelwerte der Verhältnisse s_i/s_{i+1} zwischen Amplituden

Wie man schon aus den Mittelwerten erkennt sind die Verhältniswerte fast konstant bis auf einen Fehler. Somit liegt hier eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung vor.

Abklingkonstanten für die verschiedenen Dämpfungsfälle Aus den zuvor gebildeten Mittelwerten der Amplitudenverhältnisse wird die Abklingkonstante k_w mit folgen-

der Formel berechnet:

$$\ln(s_i/s_{i+1}) = k_w T_0 \Leftrightarrow k_w = \frac{\ln(s_i/s_{i+1})}{T_0} \quad (39)$$

Die berechneten Werte sind in Tabelle 5 aufgeführt.

Dämpfung/mA	Abklingkonstante k_w/s^{-1}	Fehlerwert Abklingkonstante $\Delta k_w/s^{-1}$
100	0,0076	0,0068
200	0,0139	0,0107
300	0,0374	0,0235
400	0,0530	0,0211
500	0,0879	0,0174
600	0,1277	0,0267

Tabelle 5: Berechnete Werte für die Abklingkonstanten k_w

Zusammenhang zwischen k_w und I In den Abbildungen 4 und 5 ist die Abklingkonstante k über die Stromstärke I bzw. I^2 ausgetragen. Für I ergibt sich ein quadratischer Zusammenhang, für I^2 ein linearer mit der Proportionalitätskonstante p . Dieser Wert ist im Folgenden wichtig für die Berechnung des aperiodischen Grenzfalls mit der Stromstärke I_{ap} . Die Proportionalitätskonstante p wurde durch lineare Regression mit dem Programm *Gnuplot* ermittelt.

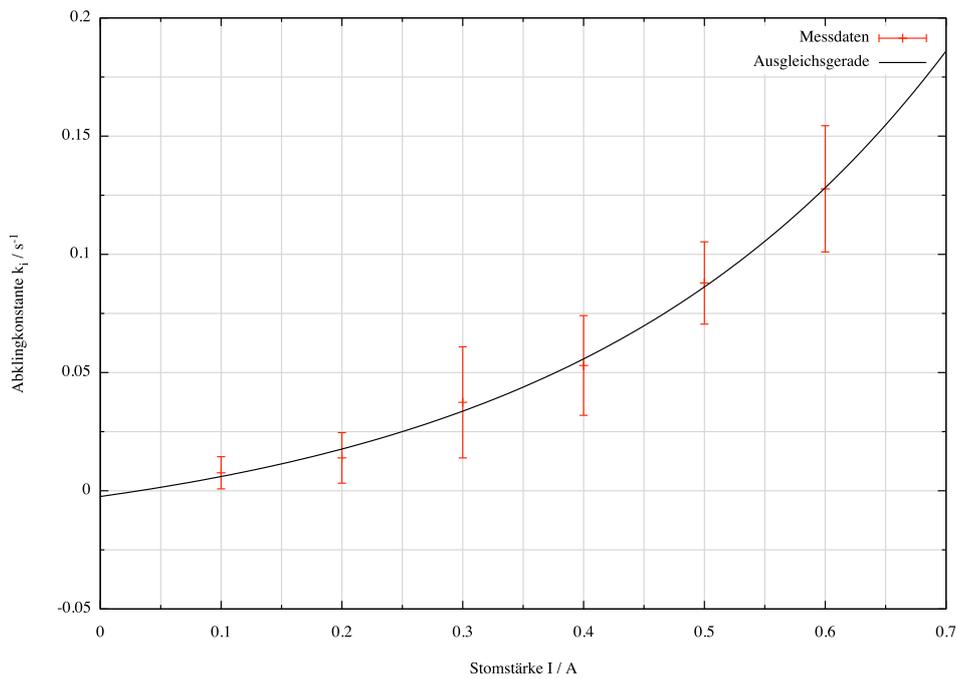


Abbildung 4: Grafische Darstellung von k_d aufgetragen zu I

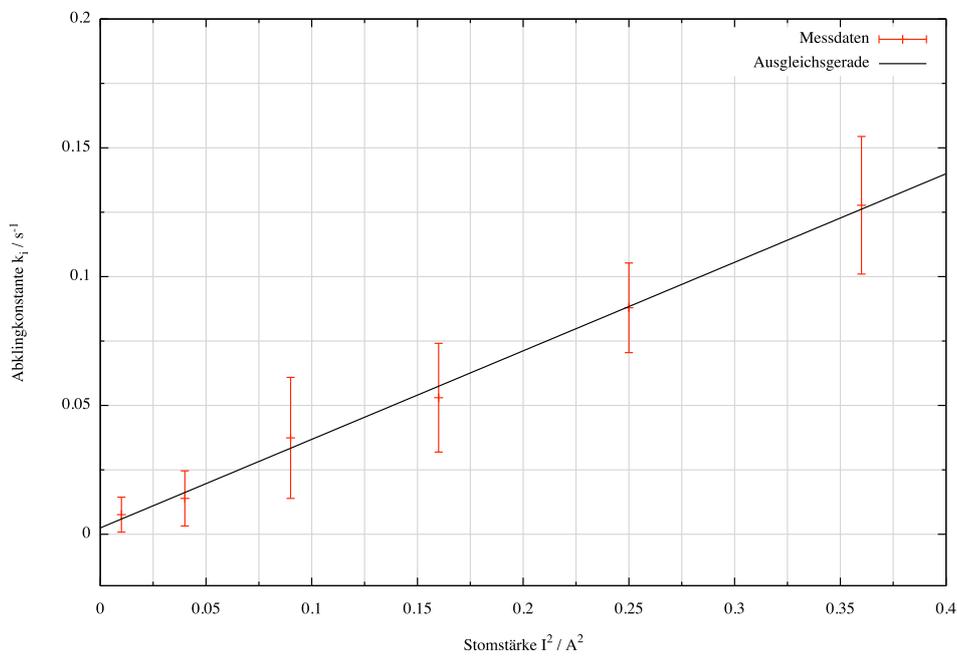


Abbildung 5: Grafische Darstellung von k_d aufgetragen zu I^2

Zusammenhang zwischen k_w und R^* Durch Umstellen von Formel (18) nach k erhält man:

$$R^* = 2 \cdot k \cdot J \quad (40)$$

Man sieht also, dass R^* proportional zur Abklingkonstanten k ist. Die Zusammenhänge zwischen k und der Stromstärke I bzw. I^2 wurden bereits im vorherigen Abschnitt erläutert.

Aperiodischer Grenzfall Für den aperiodischen Grenzfall gilt:

$$\omega_0 = k \quad (41)$$

Der Zusammenhang zwischen ω_0 und T_0 ist wie folgt definiert:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (42)$$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{2\pi}{T_0} = k \quad (43)$$

Da k mit dem Proportionalitätsfaktor p proportional zu I^2 ist gilt:

$$k = p \cdot I^2 \quad (44)$$

Einsetzen und Umstellen nach I ergibt:

$$I_{\text{ap}} = \sqrt{\frac{2\pi}{T_0 \cdot p}} \quad (45)$$

Durch Einsetzen der gemessenen Werte und Berechnung des Fehlers nach Formel (62) ergibt sich für I_{ap} :

$$I_{\text{ap}} = (2,634 \pm 0.308)\text{A} \quad (46)$$

Experimentell wurde ein Wert von 2,540A ermittelt. Man sieht, dass der gemessene Wert innerhalb der Fehlertoleranz des rechnerisch ermittelten Wertes liegt.

4.2 Fehlerrechnung

Fehler des Drehmoments Für die Berechnung des Maximalfehlers von M kommt das GAUSSsche Fehlerfortpflanzungsgesetz zum Einsatz:

$$\Delta f = \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta \bar{x} + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta \bar{y} + \dots \right) \quad (47)$$

Da die Kraft tangential an der Scheibe angreift lässt sich Formel (1) modifizieren und das Drehmoment mit der folgenden Formel berechnen:

$$M = r \cdot F \quad (48)$$

Folgende Größen sind fehlerbehaftet:

r : Der Radius der Stahlscheibe wurde mit einem Maßband gemessen. Durch partielles Ableiten von Gleichung (48) nach r erhält man:

$$\frac{\partial M}{\partial r} = F \quad (49)$$

l : Die Kraft F wurde mit einer Federwaage gemessen. Durch partielles Ableiten von Gleichung (48) nach F erhält man:

$$\frac{\partial M}{\partial F} = r \quad (50)$$

Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen (49) und (50) in (47) erhält man den Maximalfehler von M :

$$\Delta M = (F \Delta \bar{r} + r \Delta \bar{F}) \quad (51)$$

Final set of parameters	Asymptotic Standard Error
=====	=====
m = 0.025057	+/- 0.0009198 (3.671%)
b = -0.00262197	+/- 0.0009034 (34.45%)

Abbildung 6: Ausgabe der Linearen Regression für D^* durch *Gnuplot*

Fehler des Richtmoments Zur Berechnung des Wertes für D^* wurde das Programm *Gnuplot* und die integrierte fitting Funktion zur linearen Regression verwendet. In Abb. 6 ist die relevante Ausgabe der Datei fit.log dargestellt. Der berechnete Fehler für das Drehmoment ist nicht mit in diese Berechnung eingeflossen.

Final set of parameters		Asymptotic Standard Error	
=====		=====	
m	= -2.53043	+/- 0.1025	(4.052%)
b	= 99.0441	+/- 2.004	(2.024%)

Abbildung 7: Ausgabe der linearen Regression für die Lagerreibung durch *Gnuplot*

Fehler des Lagerreibungswertes Zur Berechnung des Wertes wurde das Programm *Gnuplot* und die integrierte fitting Funktion zur linearen Regression verwendet. In Abb. 7 ist die relevante Ausgabe der Datei fit.log dargestellt.

Fehler des Trägheitsmoments Für die Berechnung des Maximalfehlers von J kommt ebenfalls das GAUSSsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (47) zum Einsatz. Das Trägheitsmoment lässt sich durch Umstellen von Formel (19) nach J und Einsetzen von $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ berechnen:

$$J = \frac{D^* \cdot T_0^2}{4\pi^2} \quad (52)$$

Folgende Größen sind fehlerbehaftet:

D^* : Der berechnete Maximalfehler von D^* wird genutzt. Durch partielles Ableiten von Gleichung (52) nach D^* erhält man:

$$\frac{\partial J}{\partial D^*} = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \quad (53)$$

T_0 : Die Eigenschwingdauer wurde durch eine Videoanalyse eines ungedämpften Schwingungsvorgangs ermittelt. Durch partielles Ableiten von Gleichung (52) nach T_0 erhält man:

$$\frac{\partial J}{\partial T_0} = \frac{T_0 \cdot D^*}{2\pi^2} \quad (54)$$

Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen (53) und (54) in (47) erhält man den Maximalfehler von J :

$$\Delta J = \left(\left| \frac{T_0^2}{4\pi^2} \right| \Delta \bar{D}^* + \left| \frac{T_0 \cdot D^*}{2\pi^2} \right| \Delta \bar{T}_0 \right) \quad (55)$$

Fehler der Abklingkonstanten Für die Berechnung des Maximalfehlers von k kommt erneut das GAUSSsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (47) zum Einsatz. k lässt sich durch Umstellen von Formel (39) nach k berechnen:

$$k = \frac{\ln \frac{s_1}{s_2}}{T_d} \quad (56)$$

Folgende Grössen sind fehlerbehaftet:

s_1, s_2 : Die Amplituden der gedämpften Schwingung wurde durch eine Videoanalyse ermittelt. Durch partielles Ableiten von Gleichung (56) nach s_1 und s_2 erhält man:

$$\frac{\partial k}{\partial s_1} = \frac{1}{T_d \cdot s_1} \quad (57a)$$

$$\frac{\partial k}{\partial s_2} = -\frac{1}{T_d \cdot s_2} \quad (57b)$$

T_d : Die Schwingdauer wurde ebenfalls durch eine Videoanalyse ermittelt. Durch partielles Ableiten von Gleichung (56) nach T_d erhält man:

$$\frac{\partial k}{\partial T_d} = -\frac{\ln \frac{s_1}{s_2}}{T_d^2} \quad (58)$$

Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen (57a), (57b) und (58) in (47) erhält man den Maximalfehler von k :

$$\Delta k = \left(\left| \frac{1}{T_d \cdot s_1} \right| \Delta \bar{s}_1 + \left| -\frac{1}{T_d \cdot s_2} \right| \Delta \bar{s}_2 + \left| -\frac{\ln \frac{s_1}{s_2}}{T_d^2} \right| \Delta \bar{T}_d \right) \quad (59)$$

Fehler der Stromstärke des aperiodischen Grenzfalls Für die Berechnung des Maximalfehlers von I_{ap} kommt erneut das GAUSSsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (47) zum Einsatz. Folgende Grössen sind fehlerbehaftet:

T_0 : Die Eigenschwingdauer wurde durch eine Videoanalyse eines ungedämpften Schwingungsvorgangs ermittelt. Durch partielles Ableiten von Gleichung (45) nach T_0 erhält man:

$$\frac{\partial I_{ap}}{\partial T_0} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2T_0^2 p \sqrt{\frac{1}{T_0 p}}} \quad (60)$$

p : Der Proportionalitätsfaktor p wurde durch lineare Regression bestimmt. Durch partielles Ableiten von Gleichung (45) nach p erhält man:

$$\frac{\partial I_{ap}}{\partial p} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2T_0 p^2 \sqrt{\frac{1}{T_0 p}}} \quad (61)$$

Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen (60) und (61) in (47) erhält man den Maximalfehler von I_{ap} :

$$\Delta I_{\text{ap}} = \left(\left| -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2T_0^2 p \sqrt{\frac{1}{T_0 p}}} \right| \Delta \bar{T}_0 + \left| -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2T_0 p^2 \sqrt{\frac{1}{T_0 p}}} \right| \Delta \bar{p} \right) \quad (62)$$

5 Literatur

[Prk10] Versuchsbeschreibung

<http://groups.uni-paderborn.de/physik/studieninfos/praktika/versuch.php?versuch=s04>

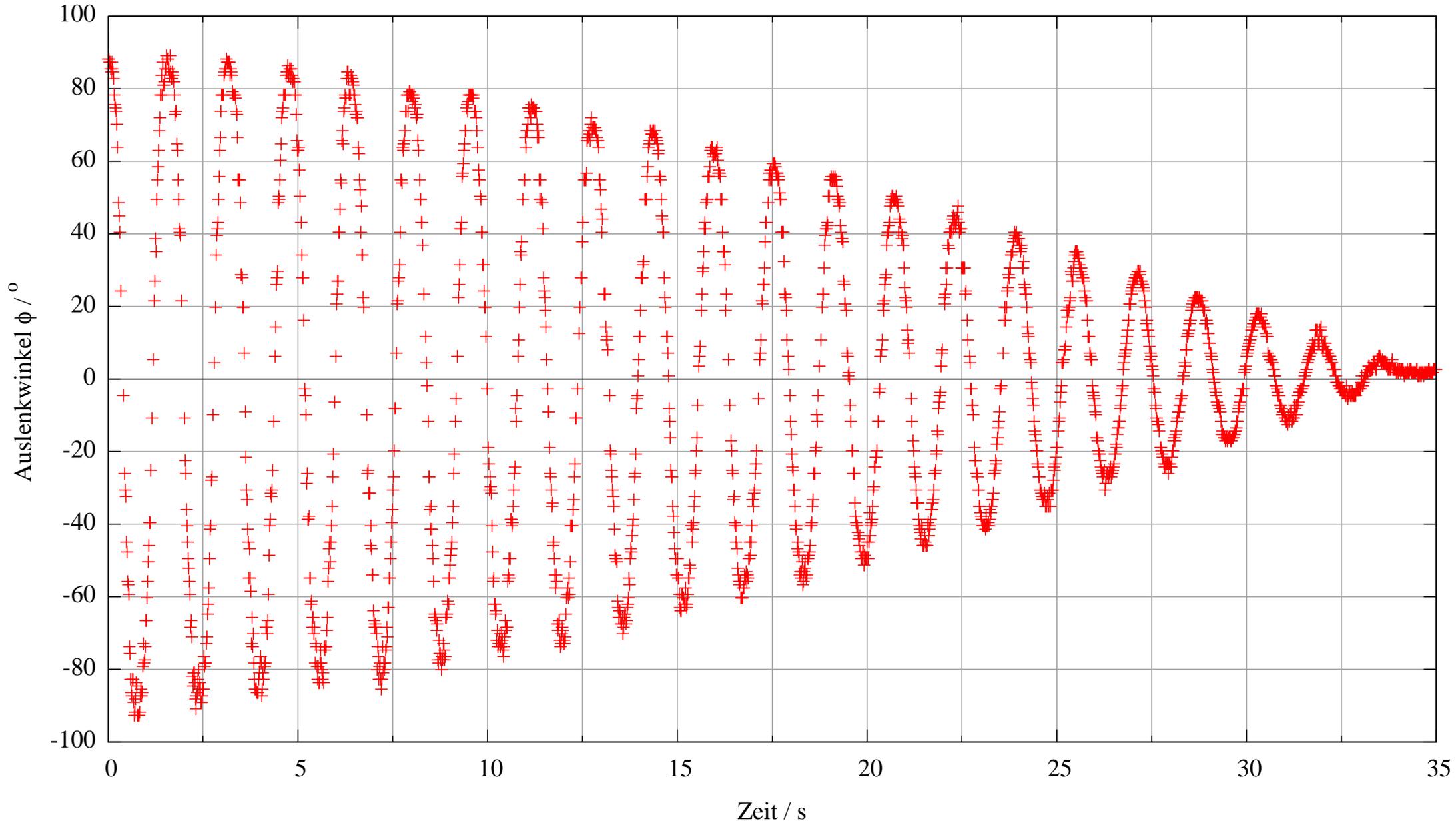
[Upb09] Kurzanleitung Fehlerrechnung (2009-12-14)

<http://physik.upb.de/fileadmin/physik/studieninfos/praktika/dokumente/fehlerrechnung.pdf>

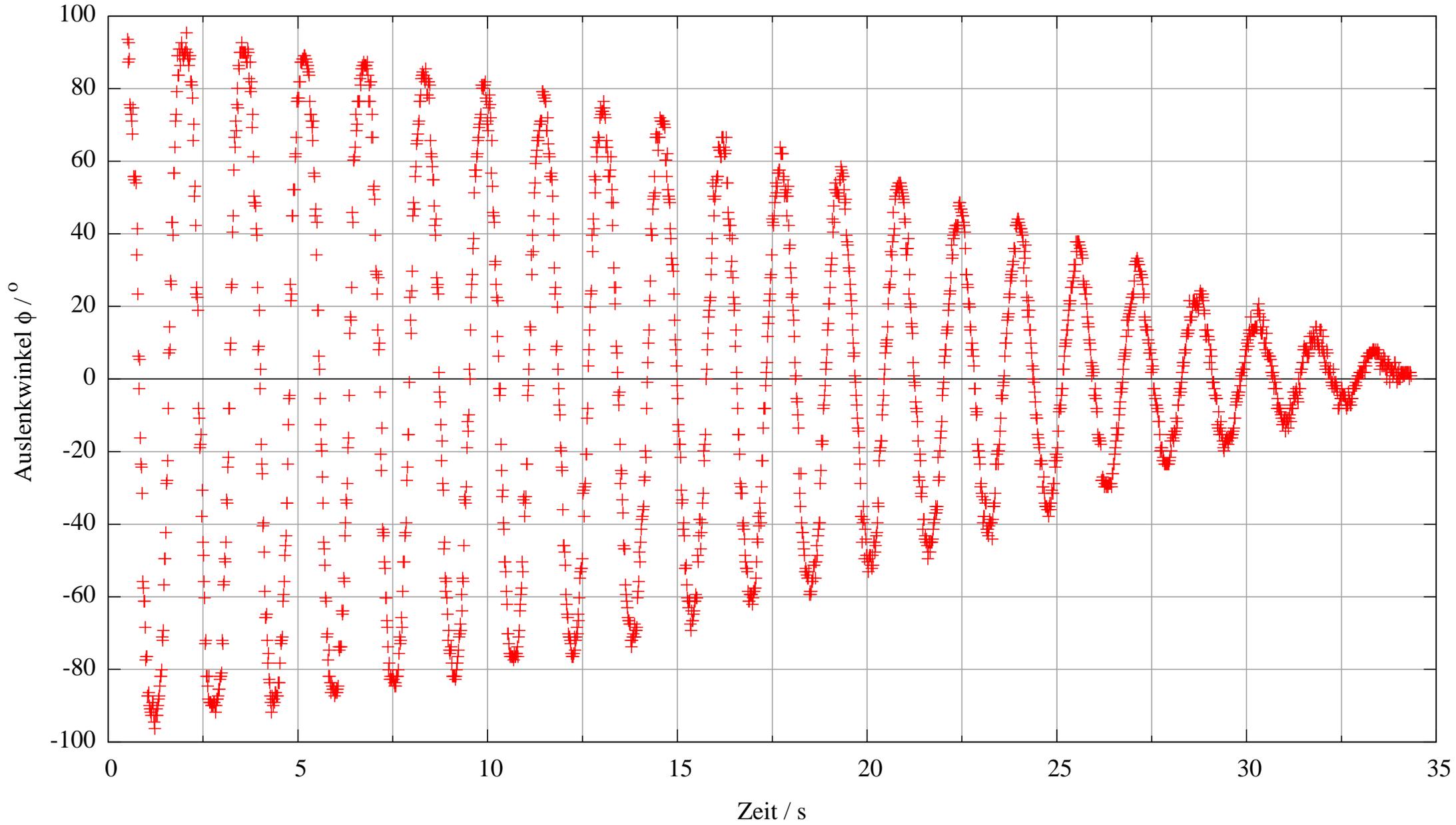
[Mes04] D. Meschede: *Gerthsen Physik*, Springer-Verlag (2004).

6 Anhänge

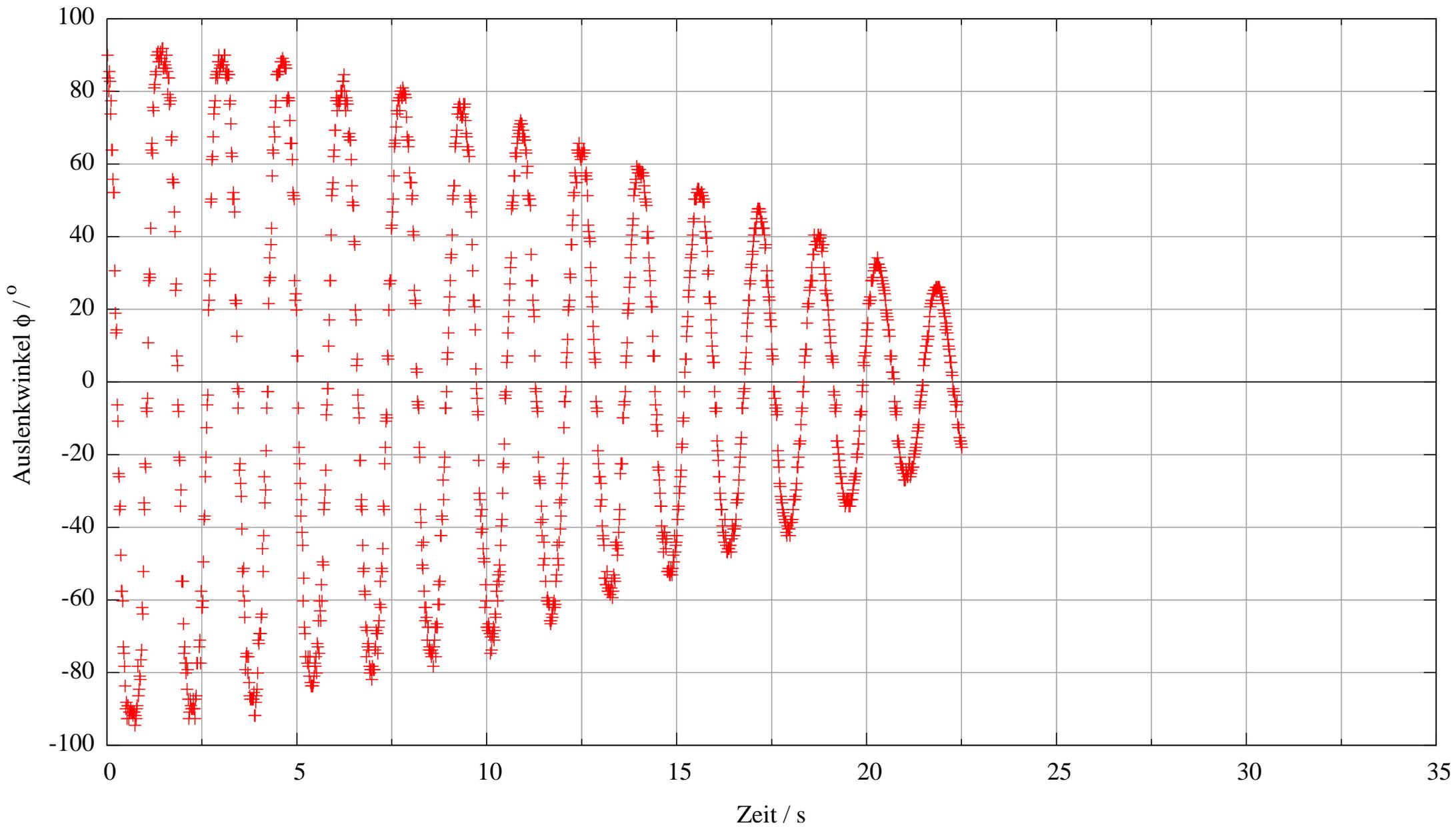
messergebnisse/t0



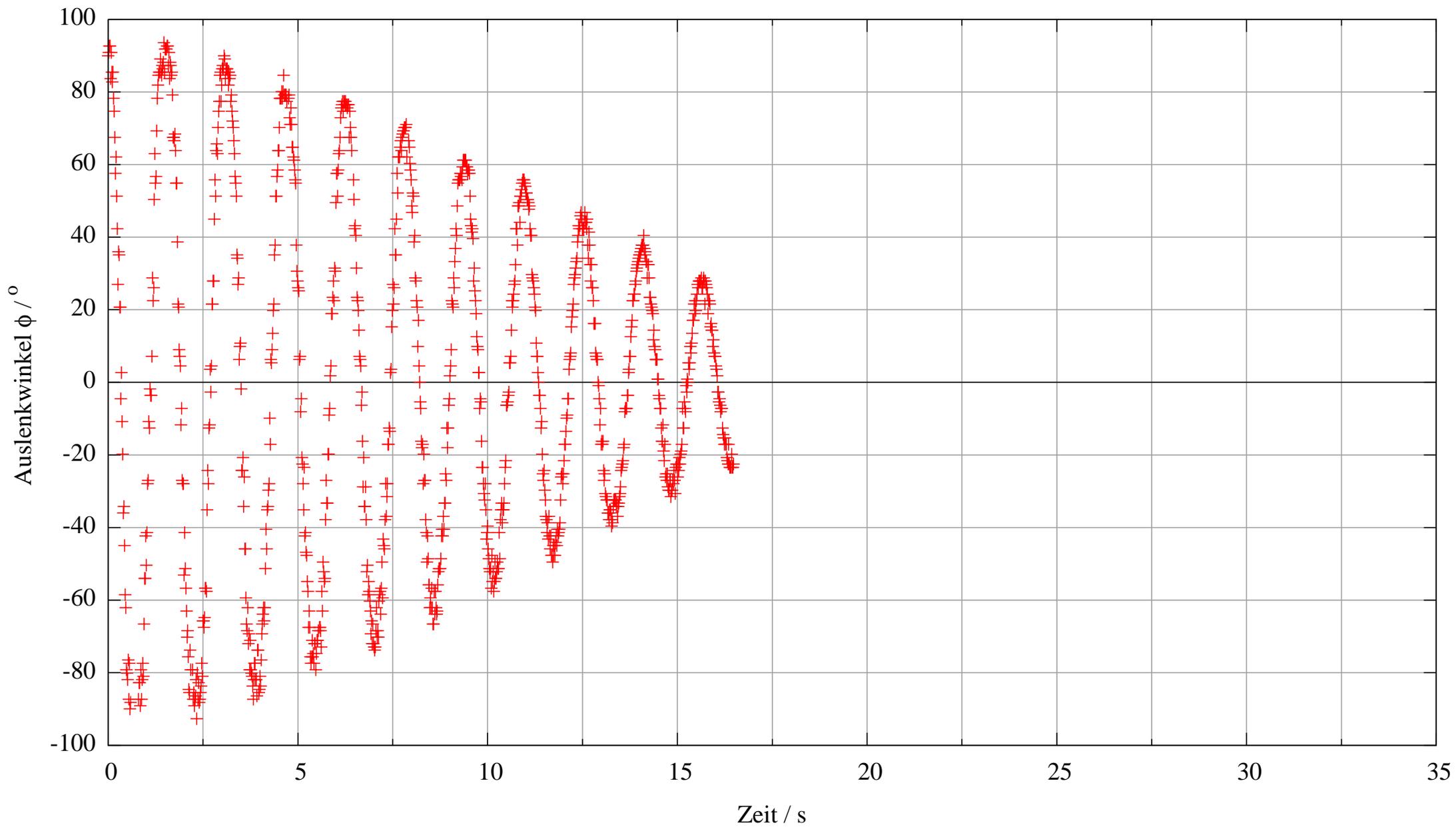
messergebnisse/t100mA



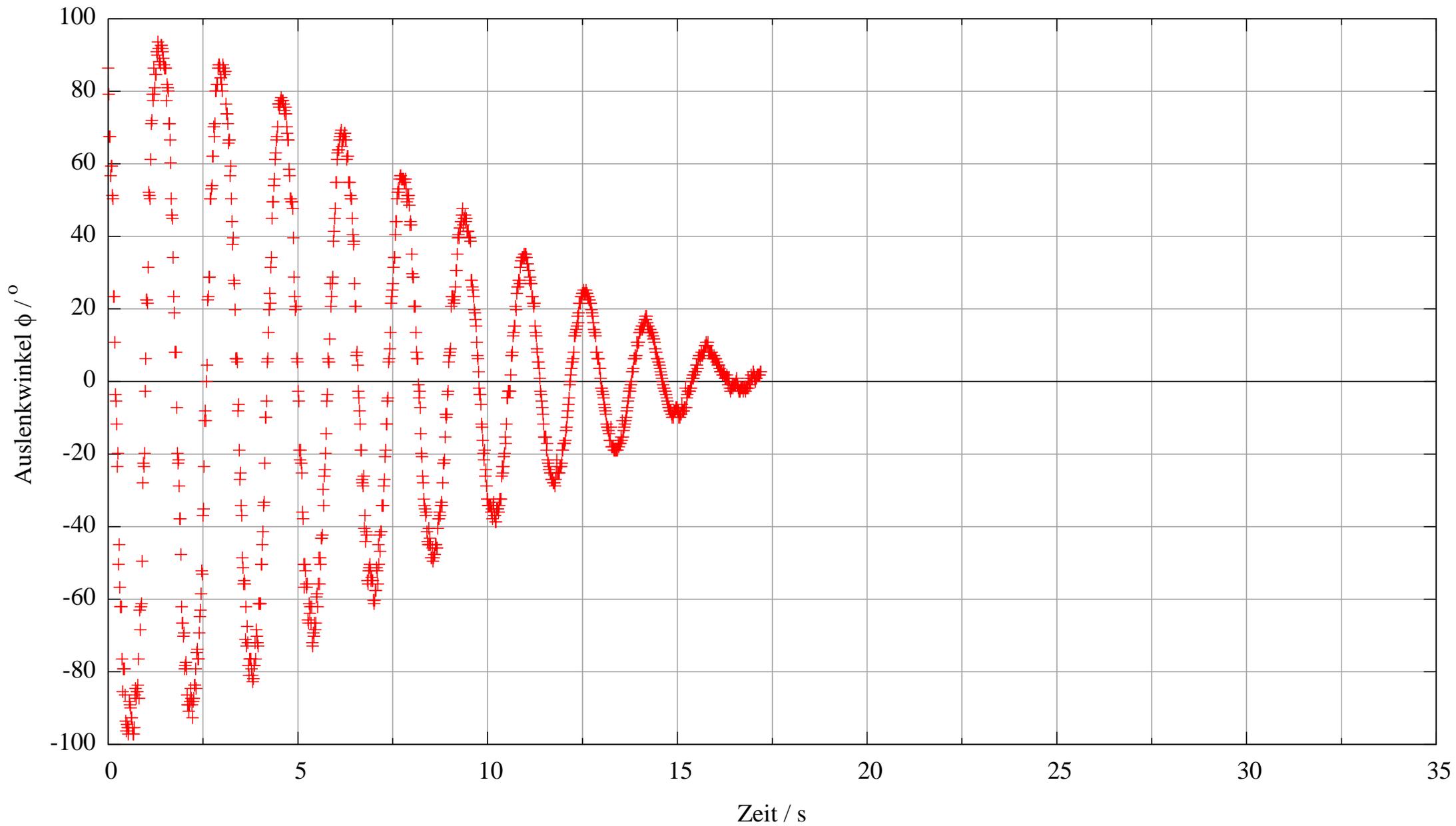
messergebnisse/200mA



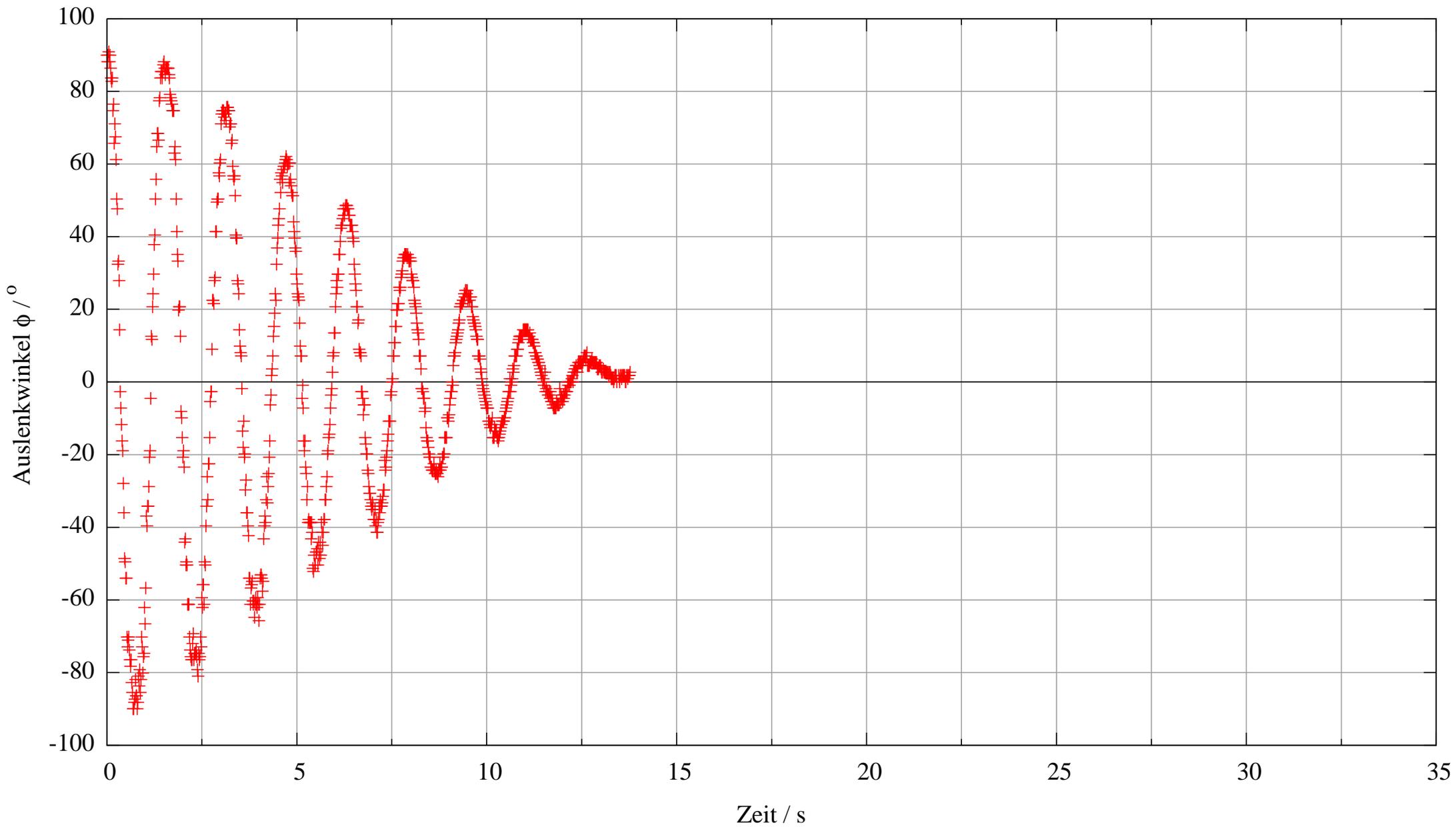
messergebnisse/300mA



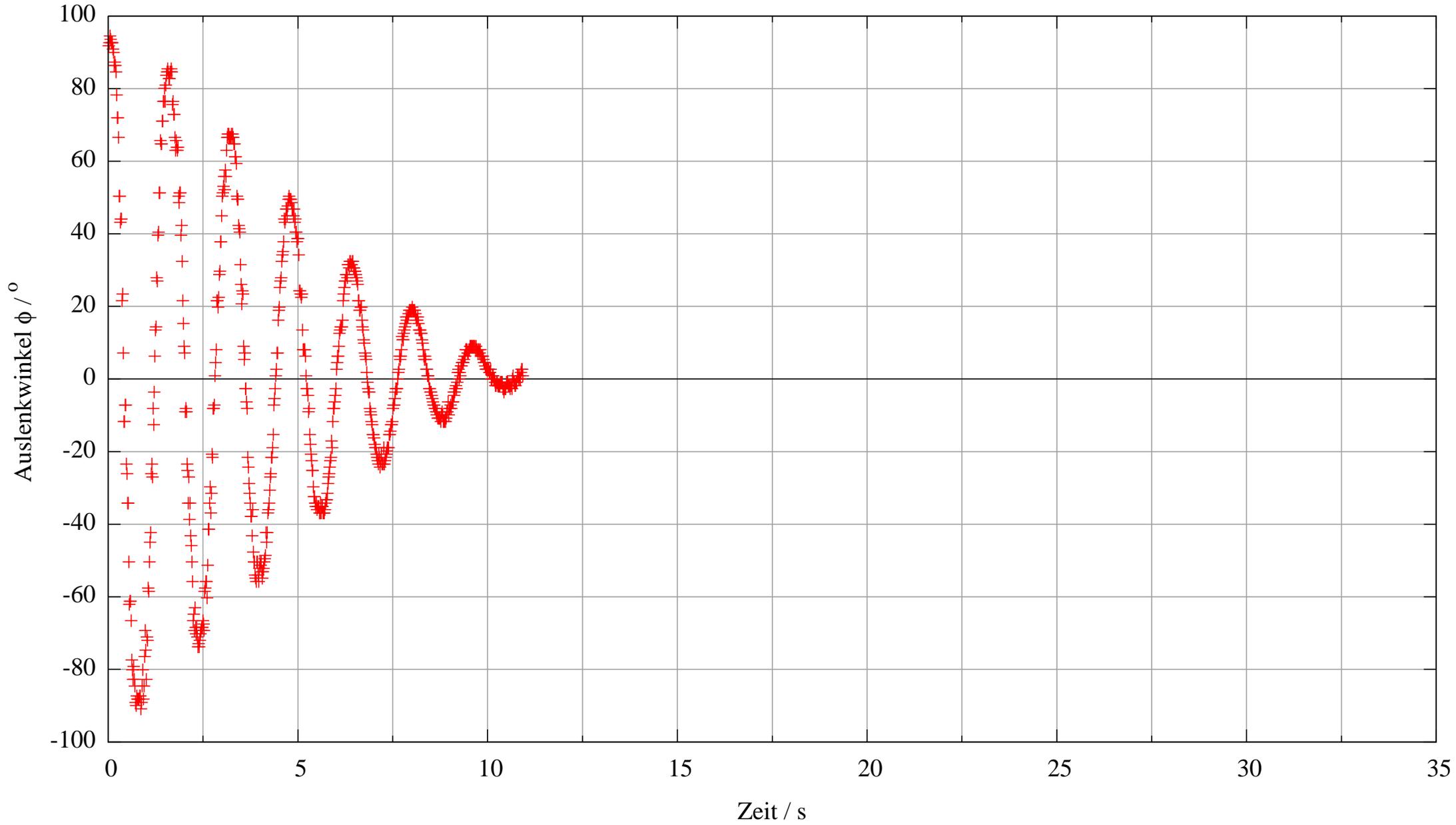
messergebnisse/400mA



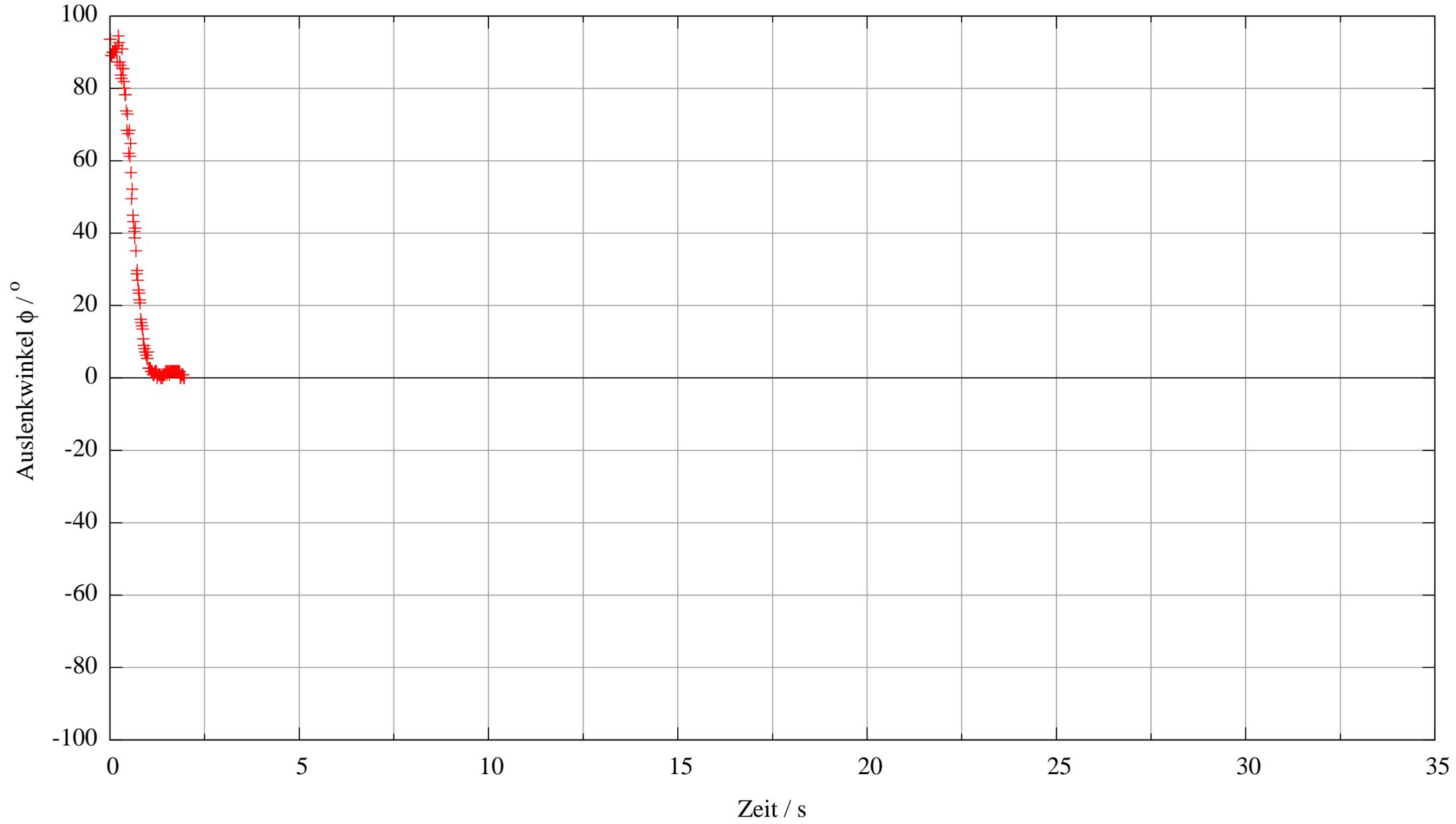
messergebnisse/500mA



messergebnisse/600mA



messergebnisse/ap



Bestimmen von: T0, Lagerreibung						
t0	winkel/roh	winkel/grad	periode	lagerreibung	wert	fehler
3,36	1,06	95,4				0,1025
4,816	1,03	92,7	1,456		2,53043	
6,48	0,99	89,1	1,664			
8,128	0,97	87,3	1,648	Jman		0,001551229
9,584	0,94	84,6	1,456			
11,152	0,89	80,1	1,568			
14,32	0,82	73,8				
15,856	0,79	71,1	12,496			
17,504	0,74	66,6	14,144			
19,024	0,69	62,1	15,664			
20,624	0,64	57,6	17,264			
22,128	0,6	54	18,768			
23,744	0,54	48,6	20,384			
25,28	0,49	44,1	21,92			
26,848	0,42	37,8	23,488			
28,416	0,37	33,3	25,056			
30,08	0,27	24,3	26,72			
31,616	0,23	20,7	28,256			
33,248	0,15	13,5	29,888			
34,64	0,09	8,1	31,28			
MITTELWERT			1,561777778			
STABW			0,078025302			

t0	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
3,36	1,06	95,4	0	0	0		1,029126214
4,816	1,03	92,7	1,456		97,40909904		1,04040404
6,48	0,99	89,1	1,664		100,32723		1,020618557
8,128	0,97	87,3	1,648		100,92217		1,031914894
9,584	0,94	84,6	1,456		100,92217		1,058179775
11,152	0,89	80,1	1,568		103,29232		1,085365854
14,32	0,82	73,8	10,96		104,27662		1,037974684
15,856	0,79	71,1	12,496		105,21257		1,067567568
17,504	0,74	66,6	14,144		105,41834		1,072463768
19,024	0,69	62,1	15,664		105,50751		1,078125
20,624	0,64	57,6	17,264		105,50751		1,066666667
22,128	0,6	54	18,768		105,41834		1,111111111
23,744	0,54	48,6	20,384		105,41834		1,102040816
25,28	0,49	44,1	21,92		105,41834		1,166666667
26,848	0,42	37,8	23,488		105,41834		1,135135135
28,416	0,37	33,3	25,056		105,41834		1,37037037
30,08	0,27	24,3	26,72		105,41834		1,173913043
31,616	0,23	20,7	28,256		105,41834		1,533333333
33,248	0,15	13,5	29,888		105,41834		1,666666667
34,64	0,09	8,1	31,28		105,41834		
MW							1,149770745
ST							0,178743501

t100	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
1,808	1,04	93,6	0	0,00000	93,60000		0,178743501
3,36	1,06	95,4	1,552	3,92723	99,32723		
4,816	1,03	92,7	3,008	7,61153	100,31153		
6,48	0,99	89,1	4,472	11,82217	100,92217		
8,128	0,97	87,3	5,936	15,99232	103,29232		
9,584	0,94	84,6	7,400	19,67662	104,27662		1,005130745
11,152	0,89	80,1	9,344	23,64434	103,74434		
14,32	0,82	73,8	12,512	31,66074	105,46074		
15,856	0,79	71,1	14,048	35,54748	106,64748		1,003102509
17,504	0,74	66,6	15,696	39,71763	106,31763		1,006187037
19,024	0,69	62,1	17,216	43,56388	105,66388		1,004289525
20,624	0,64	57,6	18,816	47,61257	105,21257		
22,128	0,6	54	20,32	51,41834	105,41834		1,012591071
23,744	0,54	48,6	21,936	55,50751	104,10751		1,059255442
25,28	0,49	44,1	23,472	59,39425	103,49425		1,023054966
26,848	0,42	37,8	25,04	63,36197	101,16197		1,00528955
28,416	0,37	33,3	26,608	67,32968	100,62968		
30,08	0,27	24,3	28,272	71,54032	95,84032		
31,616	0,23	20,7	29,808	75,42706	96,12706		1,032994267
33,248	0,15	13,5	31,44	79,55672	93,05672		1,020592898
34,64	0,09	8,1	32,832	83,07908	91,17908		
MW							1,011915811
ST							0,010212253

t200	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
3,344	1	90	0	0	90		
4,672	1,01	90,9	1,328	3,36041104	94,26041104		
6,372	0,9	87,3	2,928	7,40909904	97,40909904		
7,952	0,99	89,1	4,608	11,66022144	100,76022144		1,004093947
9,568	0,94	84,6	6,224	15,74939632	100,34939632		1,0053261
11,136	0,89	80,1	7,792	19,71711056	99,81711056		
12,608	0,85	76,5	9,264	23,44190352	99,04190352		1,004127606
14,224	0,8	72	10,88	27,5310784	99,5310784		1,024848782
15,76	0,73	65,7	12,416	31,41781888	97,11781888		1,035320879
17,256	0,65	58,5	13,952	35,30455936	93,80455936		1,014616166
18,896	0,59	53,1	15,552	39,35324736	92,45324736		1,015284172
20,48	0,53	47,7	17,136	43,36144848	91,06144848		1,036324247
22,064	0,45	40,5	18,72	47,3696496	87,8696496		1,02752741
23,616	0,38	34,2	20,272	51,29687696	85,49687696		1,051310404
25,168	0,29	26,1	21,824	55,22410432	81,32410432		
MW							1,021901156
ST							0,015987203

t300	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
5,744	1,04	93,6	0	0	93,6		
7	0,97	87,3	1,552	3,92722736	91,22722736		
9	0,94	84,6	3,152	7,97591536	92,57591536		1,0366479
10	0,86	77,4	4,704	11,90314272	89,30314272		1,083909083
12	0,74	66,6	6,24	15,7898832	82,3898832		
12	0,78	70,2	6,352	16,07329136	86,27329136		1,06247217
14	0,68	61,2	7,904	20,00051872	81,20051872		1,017955591
15	0,62	55,8	9,472	23,96803296	79,76803296		1,069071659
17	0,52	46,8	10,992	27,81448656	74,61448656		1,029383487
18	0,45	40,5	12,64	31,9846352	72,4846352		1,121516918
20	0,32	28,8	14,16	35,8308888	64,6308888		
MW							1,060136687
ST							0,035811253

t400	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
2,704	1,03	92,7	0	0	92,7		
4,224	0,97	87,3	1,52	3,8462536	91,1462536		1,056450728
5,856	0,87	78,3	3,152	7,97591536	86,27591536		1,070061827
7,536	0,76	68,4	4,832	12,22703776	80,62703776		1,109772967
9,008	0,63	56,7	6,304	15,95183072	72,65183072		1,071853511
10,64	0,53	47,7	7,936	20,08149248	67,78149248		1,143592531
12,256	0,39	35,1	9,552	24,17066736	59,27066736		1,11121983
13,824	0,28	25,2	11,12	28,1383816	53,3383816		1,061079327
15,456	0,2	18	12,752	32,26804336	50,26804336		1,066883078
17,056	0,12	10,8	14,352	36,31673136	47,11673136		
MW							1,086364225
ST							0,031238339

t500	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
1,104	1,01	90,9	0	0	90,9		
2,56	0,98	88,2	1,456	3,68430608	91,88430608		
4,224	0,84	75,6	3,12	7,8949416	83,4949416		1,129497995
5,776	0,69	62,1	4,672	11,82216896	73,92216896		1,147318708
7,36	0,54	48,6	6,256	15,83037008	64,43037008		1,174502222
8,912	0,39	35,1	7,808	19,75759744	54,85759744		1,119399215
10,512	0,28	25,2	9,408	23,80628544	49,00628544		1,165358539
12,032	0,18	14,4	10,928	27,6253904	42,0523904		
13,696	0,09	8,1	12,592	31,86317456	39,96317456		
MW							1,147215336
ST							0,023245437

t600	winkel/roh	winkel/grad	t0/s	dampfunganteil/grad	keine reibung	winkel/grad	verhaltniss zw amp
2,672	1,04	93,6	0	0	93,6		
4,176	0,95	85,5	1,504	3,80576672	89,30576672		1,185779601
5,75	0,75	67,5	3,088	7,81396784	75,31396784		1,20883096
7,376	0,56	50,4	4,704	11,90314272	62,30314272		1,29745937
8,992	0,36	32,4	6,32	15,9923176	48,3923176		1,212172301
10,624	0,22	19,8	7,952	20,12197936	39,52197936		1,209437372
12,16	0,1	9	9,488	24,00871984	33,00871984		
MW							1,220735921
ST							0,038783643

Daemfu	Amplitudenverh	Ampli Fehler	Abkling	Abkling Fehler
100	1,011915811	0,0102123	0,0076	0,0068
200	1,021901156	0,0159872	0,0139	0,0107
300	1,060136687	0,0358113	0,0374	0,0235
400	1,086364225	0,0312383	0,0530	0,0211
500	1,147215336	0,0232454	0,0879	0,0174
600	1,220735921	0,0387836	0,1277	0,0267

T_0 1,562 0,078

Jan 31, 10 19:19	200mA.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	3.344 1.00	
EXTREMA:	4.672 1.01	
EXTREMA:	6.272 1.00	
EXTREMA:	7.952 0.99	
EXTREMA:	9.568 0.94	
EXTREMA:	11.136 0.89	
EXTREMA:	12.608 0.85	
EXTREMA:	14.224 0.80	
EXTREMA:	15.760 0.73	
EXTREMA:	17.296 0.65	
EXTREMA:	18.896 0.59	
EXTREMA:	20.480 0.53	
EXTREMA:	22.064 0.45	
EXTREMA:	23.616 0.38	
EXTREMA:	25.168 0.29	

Montag Februar 01, 2010 1/8

Jan 31, 10 19:31	300mA.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	5.744 1.04	
EXTREMA:	7.296 0.97	
EXTREMA:	8.896 0.94	
EXTREMA:	10.448 0.86	
EXTREMA:	11.984 0.74	
EXTREMA:	12.096 0.78	
EXTREMA:	13.648 0.68	
EXTREMA:	15.216 0.62	
EXTREMA:	16.736 0.52	
EXTREMA:	18.384 0.45	
EXTREMA:	19.904 0.32	

2/8 Montag Februar 01, 2010

Jan 31, 10 19:34	400mA.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	2.704 1.03	
EXTREMA:	4.224 0.97	
EXTREMA:	5.856 0.87	
EXTREMA:	7.536 0.76	
EXTREMA:	9.008 0.63	
EXTREMA:	10.640 0.53	
EXTREMA:	12.256 0.39	
EXTREMA:	13.824 0.28	
EXTREMA:	15.456 0.20	
EXTREMA:	17.056 0.12	

Montag Februar 01, 2010 3/8

Jan 31, 10 19:37	500mA.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	1.104 1.01	
EXTREMA:	2.560 0.98	
EXTREMA:	4.224 0.84	
EXTREMA:	5.776 0.69	
EXTREMA:	7.360 0.54	
EXTREMA:	8.912 0.39	
EXTREMA:	10.512 0.28	
EXTREMA:	12.032 0.16	
EXTREMA:	13.696 0.09	

4/8 Montag Februar 01, 2010

Jan 31, 10 19:39	600mA.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	2.672 1.04	
EXTREMA:	4.176 0.95	
EXTREMA:	5.760 0.75	
EXTREMA:	7.376 0.56	
EXTREMA:	8.992 0.36	
EXTREMA:	10.624 0.22	
EXTREMA:	12.160 0.10	

Montag Februar 01, 2010 5/8

Jan 31, 10 19:11	ap.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	3.056 1.00	
EXTREMA:	3.136 1.01	
EXTREMA:	3.488 0.76	
EXTREMA:	3.984 0.08	
EXTREMA:	4.048 0.03	
EXTREMA:	4.096 0.02	
EXTREMA:	4.176 0.02	
EXTREMA:	4.208 0.02	
EXTREMA:	4.256 0.01	
EXTREMA:	4.304 0.01	
EXTREMA:	4.352 0.01	
EXTREMA:	4.400 0.01	
EXTREMA:	4.464 0.02	
EXTREMA:	4.512 0.02	
EXTREMA:	4.528 0.02	
EXTREMA:	4.576 0.02	
EXTREMA:	4.816 0.02	
EXTREMA:	4.880 0.01	
EXTREMA:	4.912 0.01	

Montag Februar 01, 2010 6/8

Jan 31, 10 19:53	t0.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	0.576 0.98	
EXTREMA:	2.112 0.98	
EXTREMA:	3.696 0.97	
EXTREMA:	5.296 0.96	
EXTREMA:	6.880 0.94	
EXTREMA:	8.512 0.88	
EXTREMA:	10.080 0.87	
EXTREMA:	11.648 0.83	
EXTREMA:	13.296 0.80	
EXTREMA:	14.864 0.76	
EXTREMA:	16.464 0.71	
EXTREMA:	18.096 0.66	
EXTREMA:	19.616 0.62	
EXTREMA:	21.232 0.56	
EXTREMA:	22.832 0.50	
EXTREMA:	24.496 0.45	
EXTREMA:	26.064 0.39	
EXTREMA:	27.712 0.33	
EXTREMA:	29.216 0.25	
EXTREMA:	30.832 0.20	
EXTREMA:	32.528 0.16	
EXTREMA:	34.064 0.07	

Montag Februar 01, 2010 7/8

Jan 31, 10 19:27	t100mA.csv.max	Page 1/1
EXTREMA:	1.808 1.04	
EXTREMA:	3.360 1.06	
EXTREMA:	4.816 1.03	
EXTREMA:	6.480 0.99	
EXTREMA:	8.128 0.97	
EXTREMA:	9.584 0.94	
EXTREMA:	11.152 0.89	
EXTREMA:	14.320 0.82	
EXTREMA:	15.856 0.79	
EXTREMA:	17.504 0.74	
EXTREMA:	19.024 0.69	
EXTREMA:	20.624 0.64	
EXTREMA:	22.128 0.60	
EXTREMA:	23.744 0.54	
EXTREMA:	25.280 0.49	
EXTREMA:	26.848 0.42	
EXTREMA:	28.416 0.37	
EXTREMA:	30.080 0.27	
EXTREMA:	31.616 0.23	
EXTREMA:	33.248 0.15	
EXTREMA:	34.640 0.09	

Montag Februar 01, 2010 8/8